Lehr- und Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

LeBiAC

Übungsgruppen in der Hochschul-Mathematiklehre

Fachdidaktische Anregungen für Mathematik-Tutoren

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Juni 2018

Erstellt am Lehr- und Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik der RWTH Aachen University von Robert Ivo Mei unter Leitung von Prof. Dr. Johanna Heitzer, für die *Lehr-Lern-Gelegenheiten an der Hochschule* im Fach Mathematik.

Das Vorhaben *Lehr-Lern-Gelegenheiten an der Hochschule* im Fach Mathematik wurde im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung: Warum Tutorien im Fach Mathematik?

Als angehende/r (oder auch schon erfahrenere/r) Tutor/in für eine Mathematik-Hochschulveranstaltung haben Sie vermutlich selbst zuvor in diesem Fach gute akademische Leistungen erbracht. Möglicherweise ist Ihnen mathematisches Denken schon immer recht einfach gefallen und hat Ihnen Spaß gemacht. Sicherlich sind dies gute Voraussetzungen für Ihre Tutortätigkeit!

Für viele der Hochschulstudierenden, die Sie betreuen werden, ist all das jedoch nicht selbstverständlich: Der Übergang vom Schul- zum Universitätsstoff ist schwierig – selbst für Studierende der reinen Mathematik, die sich ja meist für ihr Fach interessieren. Vielleicht hat dieser Übergang auch Sie einige Mühen gekostet. Typische Hürden sind etwa

- die formale Genauigkeit,
- die logische Strenge von Argumentationen/Beweisen, sowie
- der hohe Bedarf an eigenständiger Knobelzeit, um nötige Problemlösefähigkeiten zu entwickeln.

Dazu kommt manchmal auch eine unzureichende Beherrschung des Schulstoffs.

Noch betonter sind die Schwierigkeiten aber tendenziell in anderen MINT-Studiengängen, die Mathematik „nur“ als Werkzeug benutzen – etwa Biologie, Chemie, Informatik und Ingenieurswissenschaften. Hier sind die Studierenden seltener an der Mathematik an sich interessiert, einige stehen mit dem Fach sogar geradezu auf „Kriegsfuß“. Wer die Vorlesungen und den Stoff hauptsächlich als Schikane ansieht, ist natürlich auch weniger motiviert zu eigenständigem Knobeln und Problemlösen – und so kann die erforderliche Genauigkeit bei Argumentationen und Rechnungen nur schwer entwickelt werden. Die Abbruchquoten in den ersten Semestern in

MINT-Fächern sind hoch, und häufig werden die zugehörigen Mathematikveranstaltungen als entscheidender Stolperstein identifiziert [[10]].

Wahrscheinlich ist der schwierige Übergang vom Schul- zum Hochschulstoff einer der Gründe, warum es überhaupt in Mathematik und den anderen MINT-Fächern so häufig Tutorien gibt. Als Mathematik-Tutor/in nehmen Sie also eine Schlüsselrolle dabei ein, den Studierenden beim Bewältigen der Hürden zu helfen. Die vorliegende Handreichung versucht, Ihnen Anregungen dazu zu geben, welche Besonderheiten Mathematik-Unterrichtssituationen an der Hochschule aufweisen und worauf man beim Aufbereiten typischer fachlicher Inhalte achten kann.

2 Allgemeindidaktisches zum Auftreten vor Lerngruppen

2.1 Merkmale guten und schlechten Unterrichts

Beginnen wir fachunabhängig mit der allgemeinen Gestaltung von Lehr-Lern-Situationen; die wissenschaftliche Disziplin der Didaktik beschäftigt sich genau damit. Auch wenn didaktische Forschung natürlich oft Schulunterricht zum Gegenstand hat, sind dennoch einige Forschungsergebnisse auch für Tutorgruppen und andere Universitätslehre nutzbar. Wir wollen hier zumindest Kernaspekte anreißen.

Einer der Forschungsgegenstände der Didaktik ist es, Merkmale herauszufinden, in denen sich gute Lehr-Lern-Situationen von schlechten unterscheiden. Ein bekanntes diesbezügliches Ergebnis sind die „zehn Merkmale guten Unterrichts“ (vgl. [9]), die u.a. durch Auswertung empirischer Studien herausgefunden wurden:

1. Klare Strukturierung des Lehr-Lernprozesses
2. intensive Nutzung der Lernzeit
3. Stimmigkeit der Ziel-, Inhalts- und Methodenentscheidungen
4. Methodenvielfalt
5. intelligentes Üben
6. individuelles Fördern
7. lernförderliches Unterrichtsklima
8. sinnstiftende Unterrichtsgespräche

9. regelmäßige Nutzung von Schüler-Feedback
10. klare Leistungserwartungen und -kontrollen

Was mit den Punkten jeweils gemeint ist, wird z.B. unter `http://www.peterkoester.de/download.php?file=7cbed20d2303&req=11&id=139` näher erläutert. Vielen Lesern dürfte die Auflistung trivial erscheinen; die meisten Menschen würden wohl aus dem Bauch heraus sofort zustimmen, dass die Erfüllung dieser Punkte sinnvoll für Unterricht ist. Jedoch: All dies simultan bei der Unterrichtsvorbereitung und -durchführung zu beachten, ist gar nicht so einfach. Neben Erfahrung und Routine hilft es schlicht, sich die Punkte gelegentlich zurück ins Gedächtnis zu rufen und den eigenen Unterricht kritisch auf Mängel zu reflektieren.

Ganz analog kann es auch hilfreich sein, eine Liste typischer Fehler im Hinterkopf zu behalten, um diese beim eigenen Lehren möglichst zu vermeiden. Für die folgende beispielhafte Liste sei ausdrücklich auf die Erläuterungen in [6] (z.B. zu finden unter `http://www.fachseminar-mathematik.de/schule/Horster_10%20gravierende%20Fehler.pdf`) verwiesen, die teilweise fürs Verständnis nötig sind:

Unterrichten: 10 gravierende Fehler

1. Scheinoffener Einstieg:
   Man gibt vor, den Lernenden eine offene Frage als Ausgangspunkt für das weitere Vorgehen zu stellen; in Wirklichkeit wartet man aber nur darauf, dass irgendwann eine der Antworten den „richtigen" erwarteten Anstoß gibt, um genau in der vorgeplanten Richtung weiterzumachen.
   Tutorien haben zwar üblicherweise keinen offenen Einstieg, aber das Grundproblem scheinoffener Fragen besteht auch hier. Es ist verwandt mit Fragen wie beim Punkt 3.
2. Methoden ohne Funktionen:
   Gemeint ist damit z.B., wenn Lehrende ausgefallene Unterrichtsmethoden wie Gruppenarbeit, Stationenlernen etc. benutzen, ohne dass sie an dieser Stelle einen bestimmten Sinn hätten. Sie können so zur bloßen Beschäftigungstherapie verkommen – Frontalunterricht oder einfaches Aufgabenrechnen in Stillarbeit hätte hier womöglich zu einem größeren Lernerfolg geführt.

Dieses Problem dürfte eher selten in Tutorien auftreten, da diese ohnehin meist auf frontalem Vorrechnen basieren.

3. Schüler als Lückenfüller:
   Dieser Fehler liegt dann vor, wenn Fragen an die Lernenden nur dazu gedacht sind, relativ belanglose Lücken im frontalen Vortrag zu schließen. Vorrechnen – „Wie heißt das Verfahren, das ich jetzt anwende?“ – Vorrechnen – „Ja was ergibt $4 + 2$?“ – etc.
   In Tutorien kann dieser Fehler durchaus vorkommen. Achten Sie also darauf, wenn Sie Fragen stellen, dass diese möglichst eine „gehaltvolle“ Überlegung von den Gefragten erfordern.

4. Lernen im Labyrinth:
   Bezeichnet die Situation, wenn verschiedene Arbeitsaufträge bearbeitet werden, deren Bezug zueinander den Lernenden aber unklar bleibt.
   Dieses Problem dürfte in Tutorien selten vorkommen, da einfach eine Aufgabe nach der anderen aus dem vorgegebenen Pool vorgerechnet wird und das jeweilig vorgegebene Arbeitsblatt den Rahmen bildet.

5. Lernen für die Tafel:
   Wenn sich Lehrende nur damit beschäftigen, wie sie die verschiedenen Schülermeinungen an der Tafel festhalten können, statt effektiv auf das Ziel der Stunde hinzuarbeiten.
   Solche Probleme kommen eher selten im Mathematikunterricht vor, und noch seltener in Mathematik-Tutorien an der Hochschule.

6. Lernen, ohne zu verstehen:
   Bezeichnet die Situation, wenn Lehrende den Stoff an der Tafel oder verbal auf hohem abstrakten Niveau „abspulen“. Dabei achten sie nicht darauf, Dinge langsam und verständlich aufzubereiten, die Lernenden können nur mitschreiben und haben kaum Gelegenheit zum Nachdenken.
   Das Vorrechnen in Tutorien kann leicht zu einer solchen Situation abgleiten, wenn der/die Tutor/in nur auf das Runterschreiben seiner vorbereiteten Musterlösung achtet. Achten Sie deshalb darauf, ob Ihnen dieser Fehler unterläuft, und steuern Sie gegebenenfalls dagegen.

7. Stunden ohne Struktur:
   Wenn die einzelnen Arbeitsschritte an sich zwar sinnvoll sind, auch deren Zusammenhang einigermaßen klar ist, aber entweder keine erkennbare Struktur haben oder die Struktur wenig Sinn im Hinblick auf ein bestimmtes Ziel hat.
   Dieses Problem kommt in Tutorien eher selten vor, da die Struktur und Zielorientierung durch Aufgabenblätter und Prüfung schon vorgegeben ist. Es schadet aber auf jeden Fall nicht, die Klausur/Prüfung manchmal auch ganz explizit als Ziel im Blick zu behalten.

8. Arbeitsteilung als Taylorisierung:
   Bezeichnet die Situation in arbeitsgeteilten Gruppenarbeiten, wenn jede Teilgruppe eine klare Aufgabe mit Teilziel hat, aber nicht weiß, wie die Ergebnisse der verschiedenen Gruppen ineinandergreifen sollen und wie das übergeordnete Ziel der Gesamtarbeit aller Gruppen am Ende überhaupt aussehen soll.
   Da arbeitsteilige Gruppenarbeiten in Tutorien praktisch nie vorkommen, ist dieser Punkt für diesen Reader wenig relevant.

9. Unterrichten (fast) ohne Schüler:
   Ähnlich wie Punkt 6, wobei es hier noch 2-3 begabte Lernende gibt und der/-die Lehrende sich auf diese konzentriert, während der Rest der Gruppe vom Stoff überfordert ist. Das Ungleichgewicht wird dabei nicht bemerkt.
   Auch dieses Problem tritt oft in Tutorien auf.

10. Mögliche Lernzeit bleibt ungenutzt:
   Wann immer Lehrende nicht erkennen und (sofern machbar) beheben, dass die Lernenden sich gerade nicht mit dem Stoff beschäftigen. Das kann z.B. passieren, wenn der Großteil der Gruppe mit einer Aufgabe schon fertig ist, aber eine Eigenarbeitsphase dennoch unverhältnismäßig lang weiterläuft. Dadurch entsteht Leerlauf-Zeit, die besser für weitere Aufgaben o.ä. genutzt worden wäre. Oder aber die Lernenden sind von irgendetwas anderem stark abgelenkt, und der/die Lehrende geht darauf nicht ein oder schafft es nicht, die Aufmerksamkeit wieder auf den Stoff zu lenken.
   Auch dies kann in Tutorien auftreten – Sie sollten ein Gespür dafür haben, womit sich die Lernenden Ihrer Gruppe gerade beschäftigen – insbesondere auch wann die meisten der Gruppe mit einer Aufgabe fertig sind – und ent-

sprechend angemessen zügig im Unterrichtsverlauf weitermachen oder bei allgemeiner Ablenkung eben die Aufmerksamkeit wieder aufs eigentliche Thema bringen können.

Wie schon oben im Einzelnen angemerkt, betreffen einige der Punkte naturgemäß weniger die Tutoriums-Veranstaltungen der Hochschulmathematik. Denn wegen des üblichen Konzepts der Behandlung von Übungsaufgaben ist die Vorgehensweise typischerweise eingeschränkt: Sie ist oft frontal, es wird häufig weniger Zeit für Motivation verwendet, die Struktur ist meist schon durch die Aufgaben vorgegeben, usw. Die Fehler 3, 6, 9, 10 können jedoch durchaus auch in Tutorien eintreten. Es lohnt sich deshalb, als Tutor/in auf die eigenen gehaltenen Unterrichtsstunden zurückzublicken und sich zu fragen, ob man selbst in diese Fallen getappt ist.

2.2 Historischer Exkurs: Hinweise eines erfahrenen Lehrers

Wir machen einen kleinen historischen Abstecher in die Zeit um 1900; auch zu dieser Zeit hatten sich Lehrende bereits Gedanken darüber gemacht, welche hilfreichen Tips zur Unterrichtsdurchführung man Berufsanfängern geben kann. Ein nennenswertes Beispiel ist die Sammlung eines Gymnasialdirektors (vgl. [7]), verfasst ungefähr um die Jahrhundertwende. Obwohl es mehr als ein Jahrhundert alt ist, sind darin viele auch heute noch gültige, zeitlose Hinweise zu finden. Viele der Punkte betreffen zwar eher den Schulunterricht, aber einige sind auch für Tutorien an der Hochschule durchaus gültig. Wir geben es deshalb hier einmal vollständig an, als Hilfe ebenso wie als historisches Kleinod:

Eine historische Handreichung für junge Lehrendde nach Gottlieb Leuchtenberger

1. Gehe nie in eine Stunde ohne Vorbereitung!
2. Vergegenwärtige dir erstens, was du zunächst zu wiederholen und welche häusliche Aufgabe du zu kontrollieren hast!
3. Sodann überschaue, sichte und ordne den Stoff, den du neu darbieten, klar machen und entweder einüben oder dem Gedächtnis der Schüler aneignen willst, und zerlege

ihn in die Abschnitte (kleine Einheiten), in denen du ihn der Klasse glaubst am besten bieten zu können!

4. Dabei hast du dich einerseits an das eingeführte Lehrbuch anzuschließen, andererseits aber dich so zum freien Herrn über den Stoff und seine Anordnung zu machen, dass du bei der Durchnahme in der Klasse das Lehrbuch ganz und gar entbehren kannst.

5. Auch die Beispiele, die du zur Veranschaulichung und zur ersten Einübung nötig hast, musst du schon zu Hause auswählen oder dir selbst bilden und sie dir so aneignen, dass du im Unterricht frei über sie verfügst.

6. Sei darauf bedacht, das Neue, das du darbieten willst, mit dem in Verbindung zu bringen, was die Schüler schon wissen!

7. Bei dieser ganzen Vorbereitung kontrollierst du dich am besten, indem du dir Stoff, Lehrgang, Beispiele, wenn auch nur kurz und andeutungsweise, schriftlich vorzeichnest.

8. Nach jeder Stunde gib dir genau Rechenschaft von dem Gang, den die Stunde genommen hatte!

9. Die Unterrichtsstunde hast du gleich nach dem Glockenzeichen zu beginnen und gleich nach dem Glockenzeichen zu schließen.

10. Fange den Unterricht nicht an, bis alle Schüler grade sitzen!

11. Bei allem Reden der Schüler halte auf Vernehmlichkeit und Deutlichkeit und vergewissere dich, wenn du zweifelhaft bist, ob man den Sprecher auch am äußersten Ende verstanden hat!

12. Kommt es (wie bei den Sprachen und der Mathematik) mehr auf ein Können an, so übe sicher ein, teils an Beispielen, die du selbst geboten, teils nach dem etwa eingeführten Hilfsbuch!

13. Die Regel, die du einüben willst, sprich zunächst aus! Dann lass sie sofort in einem Beispiel erscheinen, das du sagst und an die Tafel schreibst! An dem Beispiele verdeutlichst du dann die Regel. Nun lass sie auch von den Schülern aus dem Beispiel aufstellen! Füge ein zweites und drittes Beispiel hinzu, bis die Schüler die Regel wirklich verstanden haben! Gehe nicht eher weiter, als bis die Schüler in der Anwendung der Regel wirklich Sicherheit haben!

14. Vermeide Abschweifungen und bleibe streng bei der Sache! Wo aber Erkenntnisse, welche die Schüler auf anderen Gebieten schon gewonnen haben, dienen können zur Verdeutlichung dessen, was du klar machen willst, benutze sie und schließe so das Neue an schon Bekanntes an!

15. Wo du irgend Gelegenheit hast, unterstütze das, was du sagst, durch das, was du zeigst: Karten, Bilder, Modelle und dgl.; vor allem aber die Schultafeln sind dazu da.

16. Deine Fragen sind an alle Schüler gestellt. Darum mache nach jeder eine kurze Pause; dann erst rufe den Einzelnen auf, der deine Frage beantworten soll!

17. In jeder Stunde muss möglichst jeder Schüler gefragt werden oder irgendwie „drankommen". Es ist ein großer Fehler, 10 Schülern je 5 Fragen zu geben und 30 Schülern gar keine.

18. Lehre und frage nicht auf einen Einzelnen los, indes du die anderen unbeschäftigt lässt!

19. Fürchte dich nicht vor der kleinen Pause, die entsteht, bis du die nächste Frage stellst: Sie will doch überlegt sein, und Überlegung kostet eben Zeit.

20. Lerne gut fragen: deine Frage sei inhaltlich klar, formell kurz und grammatisch richtig, d.h. so gebaut, dass das Fragewort an richtiger Stelle steht! Merkst du, dass eine Frage nicht gut war, so stelle, ehe du zur Antwort aufforderst, eine besser gebaute, klarere, kürzere, wohl auch statt einer inkorrekten, unklaren, zusammengesetzten, drei korrekte, klare, kurze, einfache!

21. An Fragen, auf die nur ein Ja oder Nein folgen soll oder kann, gewöhne dich nicht!

22. Frage nie: „Verstanden?"— Solltest du es doch tun, so wird der Zuhörende wissen, dass du selbst sicher bist, man habe dich nicht verstanden.

23. Unterbrich den Schüler nicht beim ersten halben oder schiefen Ausdruck, sondern lass ihn seinen Satz beenden, und wenn er mehrere Sätze zu sagen hat, so lass ihn diese alle beenden, ehe du verbessern oder ergänzen lässt!

24. Spaziere nicht in der Klasse umher, sondern wähle einen festen Standort, von welchem alle Schüler dich und du alle Schüler sehen kannst! Das wird gewöhnlich ein Platz in der Nähe des Katheders sein.

25. Zeige dich deinen Schülern gegenüber stets als gebildeter Mann! Lass dich ihnen gegenüber ja nicht in vulgären Redensarten gehen!

26. Unterlass alle Bemerkungen über Berufsstellung, Stand, Schicksale des Vaters oder der Mutter eines Schülers!

27. Habe keine Lieblinge und möge keinen „nicht leiden“!

28. Immer umfasse und halte mit dem Blick alle Schüler, aber ohne unstet die Augen umherzuwerfen! Dazu gehört Gespanntheit bei innerer und äußerer Ruhe und Gehaltenheit.

29. Sei immer eingedenk, dass du nicht deine Redefertigkeit zeigen, sondern deinen Schülern die Zunge lösen sollst!

30. Lächerlich wäre es, wenn du Schülern der unteren und mittleren Klassen mit Gelehrsamkeit imponieren wolltest.

31. Wolle nicht dich zur Geltung bringen, sondern die Sache!

32. Sage es dir täglich, dass du der Schüler wegen da bist, nicht diese deinetwegen!

33. Läuft dir im Unterricht oder in der Korrektur ein Irrtum unter, so beweise den Schülern, dass die Wahrheit auch über dir steht!

34. Erwecke Interesse, und du braucht wenig besondere Mittel der Disziplin im Unterricht.

35. Wenn die Aufmerksamkeit matt werden will, desgleichen, wenn etwas besonders Wichtiges als solches bezeichnet oder eingeprägt werden soll, ist auch das Chorsprechen zu empfehlen.

36. Rechne nicht auf schnellen Erfolg! Werde nicht missmutig, ungeduldig, verzagt! Suche den Grund mangelnder Erfolge immer zum großen Teil auch bei dir!

37. Brich nicht so leicht den Stab über einen Schüler!

38. Hast du in der Stunde Veranlassung zur Unzufriedenheit mit einem Schüler, so werde nicht gleich aufgebracht: Er ist ja ein Kind. Schau ihn an, dass er merkt, was du willst, und weiter tue zunächst nichts! Merkt er’s nicht, so halt ein wenig im Fragen oder im Vortrag inne und lass den Blick auf ihm ruhen! Hilft auch das nicht oder hält es nicht vor, so musst du freilich das tadelnde Wort anwenden.

39. Aber nur nicht schimpfen! Auch keine Moralpredigt! Auch keine Ironie, keinen Spott!

40. Versuche es, in den Unterrichtsstunden überhaupt ohne Strafen durchzukommen! Du wirst sehen: Wenn du wirklich nicht das deine, sondern das, was des Schülers ist, suchst, es geht.

41. Komm nicht immer wieder auf einen bestraften Fehler zurück und trage nicht nach!

42. Die häusliche Aufgabe stelle den Schülern nicht erst mit dem Glockenschlage, und sorge dafür, dass jeder sie sich richtig in sein Aufgabenbuch schreibt!

43. Bedenke, dass außer dir noch andere Leute da sind, die an die Zeit und Kraft der Schüler mit ihren häuslichen Aufgaben Anforderungen stellen!

44. Hast du Arbeiten im Fache Deutsch zu korrigieren, so lass stehen, was nicht geradezu falsch ist, und zeige, dass du weißt, du habest den Aufsatz eines Schülers vor dir!

45. Klassenarbeiten müssen aufs sorgsamste mit den Schülern vorbereitet sein, dürfen nicht Regeln unnatürlich gehäuft bieten und müssen kurz genug sein, um mit Ruhe und Sammlung angefertigt werden zu können.

46. Verhüte das Abschreiben durch stete Aufmerksamkeit! Finden sich Übereinstimmungen, die darauf schließen lassen, es habe einer vom andern abgeschrieben, so trägst du die Hauptschuld.

2.3 Lernförderliches Klima in Tutorgruppen

Was können wir schon an dieser Stelle über das Unterrichten in Kleingruppenübungen sagen? Dazu sollte man sich vor Augen halten: *Vorlesungen* in Mathematik sind – trotz gelegentlicher kurzer Beispielrechnungen – häufig durch ein knappes Abhandeln der stofflichen Grundlagen gekennzeichnet. Je nach Studiengang ist die Vorgehensweise mehr oder weniger axiomatisch und beweisend. Typischerweise schaffen es dabei die meisten der Hörer jedenfalls nicht, den Inhalt direkt in der Vorlesung vollständig nachzuvollziehen. Er wird deshalb im besten Fall anhand einer Mitschrift oder eines Skripts nachgearbeitet. Vor allem zu Vorlesungen mit sehr vielen Hörern an großen Universitäten gibt es außerdem *Globalübungen*, in denen üblicherweise Musterlösungen zu gängigen Aufgabenstellungen präsentiert werden. Allerdings können oft auch hier nicht alle Teilgedanken bis ins Detail erklärt werden. In den *Kleingruppenübungen* ist dann meist die einzige Gelegenheit, Beispiellösungen im kleinschrittigen Detail und mit allen dazugehörigen Überlegungen zu behandeln, sodass die meisten Teilnehmer alles nachvollziehen können.

Sehr unglücklich wäre es nun, wenn diese Gelegenheit zum kleinschrittigen und verständlichen Erklären ungenutzt bliebe. Es ist aber gar nicht so selten, dass auch in Tutorien Musterlösungen an der Tafel heruntergeschrieben werden, ohne auf etwaige Verständnisschwierigkeiten der Studierenden einzugehen. Dies gilt es zu vermeiden! Es ist anzustreben, den Studierenden eigenes Nachdenken und evtl. sogar eigenes Rechnen zu ermöglichen, zumindest soweit der frontale Rahmen des Tutoriums dies zulässt. Schaffen Sie eine kommunikative Atmosphäre, in der die Studierenden sich trauen, aufkommende Fragen tatsächlich auch an Sie zu stellen. Selbst wenn in Ihrem Tutorium nur Ihr frontales Vorrechnen vorgesehen ist, macht es schon viel aus, wenn Sie z.B. häufig zu den Studierenden hinsehen und so etwaige Verständnisschwierigkeiten wahrnehmen können. Aspekte, mit denen Sie insgesamt zu einer lernfördernden Grundstimmung beitragen können, sind etwa:

- Augenkontakt (schon eben genannt)
- Fragen nach den Bedürfnissen der Teilnehmer (etwa danach, welche Übungsaufgaben überhaupt vorgerechnet werden sollen, oder welche wegen ihrer Schwierigkeit oder Wichtigkeit zuerst drankommen sollten)
- Bemerken von Unverständnis bei den Studierenden; eine häufige Frage im Tutorcoaching ist, wie man die Studierenden dazu bewegen kann, mehr Rückmeldungen zu geben – mindestens zum Teil besteht die Antwort darauf aber einfach darin, zu lernen, nonverbale Hinweise für Unverständnis u.ä. bei den Studierenden zu erkennen, gewissermaßen „Wünsche von den Augen abzulesen"
- gelegentliches Nachfragen zwischendurch zum inhaltliches Verständnis, etwa von der Art „Warum können wir hier die Reihe in eine Summe zweier Reihen aufspalten?" etc.
- ähnlich wie der vorige Punkt: wenn möglich gelegentliches Abfragen von kurzen Teilergebnissen, etwa „Was ist jetzt der Wert von $g'(0)$?"; kann auch dazu beitragen, die Aufmerksamkeit zu erhalten, aber nicht zu oft machen

- nichtmonotone Sprechweise, und weder zu langsam noch zu schnell, sodass man als Zuhörer nicht zum „Abschalten“ verleitet wird
- ein eigenes Gespür als Tutor/in dafür, welches für Anfänger problematische Stellen sein können, sodass man an Knackpunkten eine Zäsur mit mehr Aufmerksamkeit setzen kann; etwa durch explizite Ankündigung, Stimmänderung, Blickkontakt, etc.
- Ernstnehmen von Verständnisproblemen der Studierenden, also kein Herunterspielen als „dumme Fragen“, Abtun als „Das ist doch ganz einfach“, oder gar Herablassung; dann trauen sich Tutorienteilnehmer auch eher, Unverständnis zuzugeben, Fragen zu stellen usw.
- gegentlich sanftes Zwingen zum Glück; statt (möglicherweise erfolglos) zu fragen „Möchte jemand von euch diese Aufgabe vorne an der Tafel vorrechnen?“, kann man stattdessen einfach freundlich und bestimmt irgendjemanden zum Vorrechnen anweisen, von dem man weiß, dass er die Aufgabe bearbeitet hat; gleiches gilt für Verständnisfragen, die man auch einfach mal an einen zufällig ausgewählten Studierenden richten kann
- Hände nicht/nur selten in den Hosentaschen oder hinter dem Oberkörper "verstecken"; freie Handflächen zu zeigen wirkt offener und aufgeschlossener, außerdem sind gelegentliche Gesten zum nonverbalen Unterstreichen u.ä. durchaus hilfreich

2.4 Fokussieren auf den Stoff

Einer der wichtigsten Punkte beim Unterrichten generell: Seien Sie die ganze Zeit fokussiert auf den Stoff und zugehörige Verständnisprobleme! Der Stoff und sein Vermitteln bilden den Ausgangspunkt, warum Sie und die Lernenden überhaupt zusammenkommen; alles andere ergibt sich daraus. Das gilt insbesondere an der Hochschule, wo die Studierenden ja tatsächlich praktisch nur zum ernsthaften Lernen in die Tutorien kommen. Sind Sie selbst auf den Stoff konzentriert, hat dies direkte Auswirkung auf die Aufmerksamkeit der Lernenden. Sind Sie andererseits nicht 100% bei der Sache, springt das genauso auf die Lernenden über. Was man daraus für Folgerungen fürs eigene Handeln ziehen kann:

- Störungen des Ablaufs – wenn etwa die Konzentration der Lerngruppe nachlässt und/oder sie laut wird – sind primär deshalb störend, weil sie das Vermitteln des Stoffs unterbrechen. Sicherlich kann es Sie auch in Ihrer Selbstwahrnehmung als Autoritätsperson stören, aber darum geht es wenn überhaupt nur sekundär.
  Daraus können wir Folgerungen für den Umgang mit Störungen ziehen: Sehen Sie diese nicht als persönlichen Angriff *gegen Sie*, sondern als Problem fürs Weiterkommen *der Lernenden selbst*. Dadurch vermeiden Sie es, gekränkt zu reagieren, was wiederum zu hämischen Reaktionen der Lernenden führen könnte. Sie können z.B. sagen „Ihr müsst leiser sein (sonst kommen wir nicht weiter)“ statt „Jetzt seid doch bitte mal endlich leise“ . Auch können Sie mögliche Störungsursachen ansprechen, optimalerweise mit Bezug zum Stoff.
  „Hat euch bei dieser Umformung jetzt irgendetwas überrascht?“
  „Ja, das ist schwer und kann in der Klausur drankommen. Das heißt aber nicht, dass ihr laut werden müsst.“
  „Ich weiß, es ist spät und ihr hattet einen langen Tag, aber versucht euch noch für eine Stunde auf die Aufgaben zu konzentrieren.“
  Achten Sie andererseits darauf, bei nur geringen Störungen auch möglichst nicht überzureagieren, da diese eher von selbst aufhören und da ein Reagieren auch den Fluss des Stoffes unterbricht: Sowenig reagieren wie möglich, soviel wie nötig.

- Auch Sie selbst sollten mit Ihren Handlungen möglichst nicht vom Stoff ablenken. Achten Sie z.B. auf Ihre Sprechweise: Je nach Typ machen Sie vielleicht zwischendurch kurze Witze oder verbale Abschweifungen. Überlegen Sie dann, wie Sie es bei sich bewerten: Wenn es wenig ist und den Stoff zum Thema hat, kann diese Art durchaus förderlich für die Atmosphäre sein. Wenn es sehr oft vorkommt und stark abschweift, kann es jedoch ablenkend wirken. In diesem Fall sollten Sie dann darauf achten, es beim Unterrichten zu reduzieren. Gönnen Sie sich dafür auch vor der Lerngruppe Ihre nötigen Sekunden zum Innehalten.

- Es kann trotz allem manchmal passieren, dass Lernende Sie mit Äußerungen vom Stoffthema abbringen und zu etwas anderem bringen wollen. Das sollten Sie natürlich bemerken, und anschließend schnell durch Ignorieren oder durch explizites Sagen wieder zum Stoff zurückkehren.

Die bisher genannten Aspekte sind weitgehend fachunabhängig gültig. Wir wollen uns im nächsten Kapitel ansehen, worauf es beim Unterrichten speziell im Fach Mathematik ankommt.

3 Mathematikspezifische, themenübergreifende Aspekte

3.1 Das didaktische Dilemma

Ein sehr grundsätzliches, zunächst fachunabhängiges Phänomen in Lehrsituationen ist das sogenannte „didaktische Dilemma“ (vgl. [5], zitiert aus [4]). Kurz formuliert besagt es folgendes: Wissensinhalte – insbesondere auch solche, die auf Verstehen basieren – können immer nur in irgendeiner Darstellungsform vermittelt werden. Zwischen einem kognitiv erfassten *Inhalt* und seiner äußeren *Darstellung* besteht jedoch praktisch immer ein Unterschied. Die Lernenden müssen selbst kognitiv tätig werden, um diesen Unterschied zu überbrücken und ein Verständnis des Inhalts zu erreichen. Verstehendes Wissen auf Lernendenseite ist deshalb nie bloß direktes Ergebnis einer Mitteilung. Auch wenn dieses Dilemma in grundsätzlich allen Fächern auftritt, so ist es doch in der Mathematik besonders präsent; mathematisches Wissen beruht vermutlich häufiger als in allen anderen Disziplinen auf verstehendem Durchdringen. Schließlich handelt es sich bei mathematischen Inhalten um rein gedankliche Konstrukte: Selbst wenn Anschaulichkeit oder Anwendungskontexte genutzt werden (Geometrie, technische Anwendungen, ...), so ist der eigentliche mathematische Anteil das abstrakt Idealisierte. In anderen Disziplinen ist der Anteil an rein faktischem, empirisch begründetem oder anderweitig direkt an der Realität orientiertem Wissen höher – man denke etwa an Biologie, Medizin, die Gesellschaftswissenschaften usw.

Wie hilft uns das Kennen des didaktischen Dilemmas beim Unterrichten weiter? Unter anderem trägt es zu einer Grundhaltung bei, mit der man für mögliche Fehlvorstellungen oder andere Fehler der Lernenden „offen ist“. Man sollte solche Fehlvorstellungen sogar ganz explizit kennen, bei Lernenden bemerken, und ihnen möglichst entgegenwirken. Denn aufgrund der Gebundenheit an eine (immer unvollständige) Darstellungsform ist es kaum zu vermeiden, dass bestimmte Wissensinhalte bei einigen Lernenden zunächst falsch verstanden werden. Sie können typischen Fehlern am besten „den Wind aus den Segeln nehmen“, wenn Ihnen diese schon vorher als solche bekannt sind. Es ist also für Tutoren/Tutorinnen angebracht, nicht nur den direkten Weg zum Verständnis der Inhalte zu kennen, sondern auch mögliche Umwege und Sackgassen. Optimalerweise hat man selbst schon einmal vorschnell entwickelte Fehlvorstellungen verwerfen müssen. Solche Erfahrungen bewahren auch davor, auf vermeintlich „dumme Fragen“ von Lernenden mit Nicht-Ernstnehmen zu reagieren (siehe oben). Wir werden später bei einigen mathematischen Themengebieten Beispiele für mögliche Fehlvorstellungen sehen.

3.2 Problemlösen

Der amerikanisch-ungarische Mathematiker George Pólya hatte untersucht, nach welchem Muster erfolgreiches Lösen von (vor allem mathematischen) Problemen abläuft. Ein Problem kann dabei eine beliebige kognitive Aufgabe sein, die jemand lösen muss, *ohne dafür bereits ein „Kochrezept“ zu kennen*. Was ein Problem ist, hängt also auch stark von Vorwissen und Erfahrung einer Person ab. Jedenfalls sieht Pólya für diesen Problemlöseprozess eine Unterteilung in folgende vier Phasen (vgl. [4]):

- Verstehen der Aufgabe (Gegebenes und Unbekanntes, Bedingungen, etc.)
- Ausdenken eines Plans (Ähnlichkeit mit Bekanntem, Umformulierung, Lösen von verwandten oder Teil-Problemen, etc.)
- Ausführen des Plans (unter Kontrolle der Korrektheit jedes Schritts)
- Rückschau (andere Lösungswege, Nutzen für andere verwandte Probleme, etc.)

Dabei ist der zweite Schritt – das Ausdenken eines Plans – derjenige, der vermutlich am schwierigsten zu trainieren ist. Es gibt zwar verschiedene Techniken, sogenannte Heuristiken, mit denen man versuchen kann, einen voraussichtlichen Lösungsweg zu finden: Etwa, zuerst ausprobierend ein paar konkrete Instanzen eines Problems anzuschauen, evtl. spezielle Sonderfälle zu betrachten, oder ein Problem so zu variieren, dass es leichter lösbar wird usw. Allerdings gibt es kaum Regeln dafür, welche dieser Heuristiken bei welchen Problemen helfen, vor allem nicht sobald es an ganz bestimmte Problemfälle geht. Meist muss ein „Funken der Erkenntnis“ überspringen, um tatsächlich einen erfolgreichen Plan für ein Problem zu finden. Ein solches gutes Gespür für mögliche Lösungsansätze lässt sich kaum frontal an passive Lernende vermitteln – letztlich müssen dafür die Lernenden selbst aktiv Knobel- und Trial-and-error-Erfahrung sammeln. Ein Beispiel für die Bedeutung der zweiten Pólya-Phase aus dem typischen Vorlesungsstoff ist die Konvergenz von Reihen: Es gibt keine vollständige Regel, wie man am Reihenterm die Konvergenz bzw. Divergenz erkennen könnte. Auch, mit welchem Konvergenz-/Divergenzkriterium man dies dann beweisen kann, lässt sich (von einfachen Fällen abgesehen) kaum deterministisch bestimmen. Hier helfen letzten Endes nur Ausprobieren, Erfahrung sowie einige Heuristiken. Letztere können den Lernenden ganz explizit gezeigt werden; im stoffbezogenen nächsten Kapitel sehen wir Beispiele dafür.

Die Hochschulveranstaltungen in Mathematik – ob nun Vorlesungen oder begleitende Übungsveranstaltungen – legen im Hinblick auf die Pólya-Einteilung eher einen Schwerpunkt auf das korrekte *Ausführen* von Plänen. Das mag zum Teil daran liegen, dass man Strategien für das *Ausdenken* von Plänen wie oben gesagt am besten durch eigenes Tätigwerden und Knobelerfahrungen entwickeln kann. Dennoch sollten Sie als Tutor/in wann immer möglich erkennen, wenn bestimmte Überlegungen relevant sind oder Heuristiken angewendet werden können, und dies den Teilnehmern ganz explizit erklären. Das ist insbesondere deshalb eine wichtige Chance, da in den frontalen Musterlösungen bei Globalübungen etc. diese heuristischen Gedanken oft weggelassen werden. In einer Musterlösung steht dann etwa die Fallunterscheidung für x fertig da; wie man zu dieser Fallunterscheidung gelangt, wird nicht erklärt. Solche Stellen, bei denen ausprobierende heuristische Vorarbeit nötig ist, sind unzählbar und größtenteils völlig unterschiedlich. Wir geben hier nur ein sehr knappes Beispiel, wie eine zugehörige Erklärung aussehen kann: Bei der Aufgabe „Zeigen Sie mithilfe des Differenzenquotienten, dass die Funktion $\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$ überall differenzierbar ist. Benutzen Sie dabei das Additionstheorem $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),\ x, y \in \mathbb{R}$.“ lässt sich etwa vermuten, dass man für den Differenzenquotienten besser die $x+h$, $h \to 0$-Methode als die $x \to x_0$-Methode benutzt, da man dann direkt das Additionstheorem verwenden kann. Im nächsten Kapitel finden Sie weitere Beispiele.

3.3 Feedback für die Studierenden

Das Geben von Feedback ist in der Mathematiklehre von besonderer Bedeutung. Wegen der abstrakten, rein ideellen Natur der meisten mathematischen Konzepte können Fehlvorstellungen kaum durch einen Abgleich mit der Realität korrigiert werden – man benötigt stattdessen strenge Logik. In dieser sind allerdings die wenigsten Menschen von vornherein gut genug geübt, um Fehler selbst ausbessern zu können. Man braucht also Feedback von „logisch Erfahrenen“, um nach und nach zu lernen, welche Argumentationen gültig bzw. ungültig sind.

In Hochschul-Mathematikveranstaltungen gibt es hauptsächlich folgende Möglichkeiten, als Studierende Feedback zu erhalten:

- Globalübungen und Tutorien/Kleingruppenübungen, in denen Musterlösungen vorgestellt werden – diese zeigen mindestens, wie es richtig geht, und in Kleingruppenübungen kann evtl. sogar der/die Tutor/in Rückmeldungen zu einzelnen Gedankengängen geben
- korrigierte Hausaufgaben
- die Klausurergebnisse selbst

Natürlich ist rein summatives Feedback (wie eine Klausurnote) zwar schon ganz gut als Indikator für den Leistungsstand, aber nicht wirklich konstruktiv hilfreich, um zu lernen „wie es geht“. Die ersten beiden Punkte bleiben die wichtigsten. Versuchen Sie also, bei der Korrektur von Hausaufgaben möglichst nicht nur dranzuschreiben, an welchen Stellen es Punkte/Punktabzüge gibt, sondern schreiben Sie genau, wo ein Fehler liegt, was daran der falsche Gedanke war, und wie es stattdessen gemacht werden muss (grob).

Es kann natürlich je nach Veranstaltung sein, dass die Studierenden gar nicht die Möglichkeit haben, schriftliche Hausaufgaben korrigiert zu bekommen (z.B. in großen Mathematik-für-Maschinenbauer-Vorlesungen mit mehr als 1000 Hörern). Dann fällt diese Feedback-Möglichkeit weg, und es bleiben hauptsächlich nur die Tutorien sowie die Klausuren selbst für Feedback. Letzteres ist zu wenig – wenn Studierende über das ganze Semester kein Feedback zu ihren eigenen Gedankengängen bekommen, kann leicht in der Klausur das böse Erwachen folgen. Sie sollten also vor allem bei Ermangelung schriftlicher Hausaufgaben im Tutorium wann immer möglich versuchen, die Studierenden zum Beschreiben eigener Gedankengänge anzuregen, um dazu Rückmeldung geben zu können. Ein gängiges Mittel dafür ist das Stellen von Zwischenfragen, z.B.:

- “Wie geht es jetzt an dieser Stelle weiter?“
- “Welche Fallunterscheidung könnte jetzt sinnvoll sein?“
- “Warum kann ich jetzt hier nicht einfach XYZ machen?“

Optimalerweise überlegen Sie sich vorher, welche „Knackpunkte“ bei den jeweiligen Aufgaben vorkommen, und können genau dazu dann solche Fragen stellen. Jedenfalls sollten die Studierenden die Gelegenheit haben, wenigstens an vereinzelten wichtigen Stellen wirklich selbst zu überlegen. Wenn Sie dann bei den Antworten das Gefühl haben, das der Gedankengang nicht von genügend vielen verstanden wurde, nehmen Sie sich ruhig ein paar Minuten zum Klären des Sachverhalts in der Gruppe.

3.4 Sonstige themenübergreifende Anregungen

- Grundsätzlich sollten Sie bedenken: Was Sie in Ihrer Kleingruppenübung an die Tafel schreiben, wird mitgeschrieben und bildet eine wichtige Lern- und Übungsgrundlage für die Studierenden. Das, was nicht an der Tafel steht, kann tendenziell vergessen bzw. nicht gelernt werden. Gehen Sie also mit gutem Beispiel voran! Schreiben Sie Lösungen an der Tafel so auf, wie es später auch von den Studierenden in Prüfungen verlangt wird. Vor allem genutzte Voraussetzungen, Bedingungen, Begründungen sollten auch an der Tafel explizit stehen. Das umfasst insbesondere die Begründungs-Kurzkommentare an Gleichheits- oder Äquivalenzzeichen, etwa, wenn man „$x > 0$“, „$|x - 2| < 1$“, die Dreiecksungleichung oder eine Induktionsvoraussetzung „IV“ verwendet. Im Zweifelsfall ist es immer besser, diese Kurzbegründungen dranzuschreiben. So kann manchmal auch Missverständnissen bei Klausuren oder Klausureinsichten vorgebeugt werden. („Ich hatte das aber so und so gemeint!“)
  Auch die Voraussetzungen für die Anwendung von Sätzen (Stetigkeit für die

Anwendung des Zwischenwertsatzes etc.) sind ein solcher Punkt. Schreiben Sie wann immer möglich explizit vor der Anwendung eines Satzes, dass die entsprechenden Voraussetzungen dafür erfüllt sind.

- Passend zum vorigen Punkt: Schreiben Sie alle wichtigen Schritte zu einer Aufgabenstellung wirklich an die Tafel. Selbst wenn bei einem bestimmten Term einer der Schritte trivial wird, schreiben sie ihn zumindest kurz als Stichwort auf, statt ihn nur verbal zu nennen. Dadurch bleiben den Studierenden immer alle wichtigen Schritte im Gedächtnis. Sollen z.B. bei einer gegebenen Menge mit zwei Verknüpfungen die Körperaxiome auf Gültigkeit überprüft werden, und ist dabei zufälligerweise die Kommutativität der additiven Gruppe offensichtlich, schreiben Sie diesen Schritt dennoch als Stichpunkt auf. Man kann je nach Situation auch ein Häkchen oder das Wort „trivial" danebensetzen. So bleibt klar, dass die Kommutativität der additiven Gruppe ein Aspekt ist, der überprüft werden muss.

- Vermeiden Sie Textwüsten beim Tafelanschrieb: Viel Text an der Tafel auszuformulieren – „Darum erhalten wir ..., was wiederum ... impliziert" o.ä. – mag gut gemeint sein, sorgt jedoch für weniger visuelle Übersicht und verwirrt eher, als zu helfen. Außerdem kostet das Anschreiben Zeit. Meist reichen symbolische Notationen ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ etc.) und sehr wenige Wörter (cos stetig in 0) aus und lassen so mehr Platz zur übersichtlichen visuellen Anordnung der Argumentation.

- Es passiert öfters: Man hat eine Lösung zum Vorrechnen in der Übungsstunde vorbereitet, aber beim Vorrechnen fallen plötzlich doch Fehler oder Ungereimtheiten auf. Sie können diese Situation oft als Lerngelegenheit für die Studierenden nutzen! Sie können das Problem selbst erklären oder aber die Studierenden es selbst finden lassen. Damit lernen die Studierenden evtl. mehr, als wenn Sie nur still für sich überlegen, wie man das Problem ausbessert, und es direkt an der Tafel korrigieren.

- Es gibt – vielleicht besonders ausgeprägt in Service-Mathematikvorlesungen – eine grundsätzliche Neigung der Studierenden zum „Schablonenlernen". Vor allem schwächere Studierende, die Hemmungen haben selbst zu knobeln, wenden dann oft nur starr genau die Verfahren an, die sie in Übungen gesehen haben. Das kann zu vielerlei Problemen führen (u.a. Übergeneralisierungen, wo dann etwa ein Grenzwert der Form „$0 \cdot 0$“ mit L'Hospital gelöst wird, siehe auch unten bei Differenzierbarkeit). Sie können das vermutlich nicht verhindern, aber Sie können trotzdem versuchen, an angebrachten Stellen explizit zu sagen, dass z.B. die soeben gezeigte Lösung nur bei speziellen Termen funktioniert, dass der gezeigte Weg nur einer von mehreren möglichen ist usw.

- Bei Übungsaufgaben zu im Allgemeinen rechenlastigeren Aufgabenstellungen (z.B. Partialbruchzerlegung einer gebrochenrationalen Funktion) sind Terme oft schön gewählt, damit die Studierenden nicht übermäßig nur mit Arithmetik beschäftigt sind und sich an einigen Stellen lange Rechnungen sparen können. Man sollte als Tutor/in im Hinterkopf behalten, dass es fürs Verständnis einiger Verfahren dennoch hilfreich sein kann, wenn die Studierenden einmal zu einem „Worst-Case“-Term die teilweise oder vollständige Rechnung sehen.

- Andererseits gibt es auch Problemstellungen, bei denen die Terme einigermaßen speziell gewählt sein *müssen*, damit man sie mit den gängigen Methoden der Erst- und Zweitsemester-Mathematik überhaupt lösen kann: Beispiele dafür sind Integrale oder (ε, δ)-Stetigkeitsbeweise. Auf diesen Umstand kann man explizit hinweisen.

- Üben Sie als Tutor/in ein wenig das Schreiben der griechischen Buchstaben. Zu den „problematischeren“gehören zum Beispiel ξ und ζ. Schauen Sie sich einmal die Buchstaben in groß an und schreiben Sie diese dann mehrmals hintereinander, bis es einigermaßen automatisiert ist. Achten Sie jeweils auf eine Schreibweise, die möglichst nicht mit anderen Buchstaben verwechselbar ist, z.B. γ nicht mit v, ρ nicht mit p etc.

- Für bessere Lesbarkeit und Übersicht an der Tafel achten Sie auf die korrekte Anordnung bei mehrzeiligen Termen/Gleichungen/etc. Bei Äquivalenzumformungen sollten etwa Äquivalenzzeichen und Gleichheitszeichen möglichst untereinander stehen:

$$\begin{aligned} && x^2 &= 2 - x \\ \Leftrightarrow && x^2 + x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow && (x-1)(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow && x = 1 &\;\vee\; x = -2 \end{aligned}$$

Bei mehrzeiligen Gleichungen rückt man üblicherweise nach einem Zeilenumbruch das Gleichheitszeichen ein, sodass die „linkesten“ Gleichheitszeichen alle untereinander stehen:

$$\begin{aligned}(x-2)^2-(x+1)^2 \quad &= x^2-4x+4-(x^2+2x+1)\\ &= x^2-4x+4-x^2-2x-1\\ &= x^2-x^2-4x-2x+4-1=-6x+3\end{aligned}$$

Bei mehrzeiligen Termen werden Zeilenumbrüche so gesetzt, dass die neue Zeile mit einem Operator $+,-,\cdot,\div$ beginnt, möglichst aber mit $+$ oder $-$ statt $\cdot$ oder $\div$. Die Anordnung ist ansonsten ähnlich wie zuvor bei den mehrzeiligen Gleichungen:

$$\begin{aligned}A\quad &\cdot (x-2)(x+1)(x^2+1)^2+B\cdot(x+1)(x^2+1)^2\\ &+C\cdot(x-2)^2(x^2+1)^2\\ &+(Dx+E)\cdot(x-2)^2(x+1)(x^2+1)\\ &+(Fx+G)\cdot(x-2)^2(x+1)\end{aligned}$$

4 Anregungen zu spezifischen Mathematikthemen

Die vorigen Kapitel waren allgemein gehalten. Nun jedoch wollen wir uns konkret ansehen, welche didaktischen Besonderheiten man bei typischen Vorlesungsinhalten in Mathematik ausmachen kann, und was zur verständlichen Aufbereitung dazu jeweils wissenswert ist. Wir halten dieses Kapitel stichpunkthaft; und wie Sie sich vermutlich schon denken, erheben diese Stichpunkte absolut keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Zu verstehen ist es als Sammlung von Anregungen für den eigenen Unterricht.

4.1 Grundlagen, Logik, Mengen

- Zu Beginn des Studiums ist es für viele ungewohnt, selbst einfache logische Folgerungen aufzustellen. Als weitere kleine Hürde kommt hinzu, dass bei verschiedenen Konzepten typische Folgerungsmuster zu verinnerlichen sind:
  - Eine Äquivalenz $X \Leftrightarrow Y$ kann man z.B. durch Nachweis von „$X \Rightarrow Y$" und „$Y \Rightarrow X$" oder „$X \Rightarrow Y$" und „$\not{X} \Rightarrow \not{Y}$" zeigen.
  - Eine Mengeninklusion $A \subset B$ kann man z.B. durch Nachweis von „$x \in A \Rightarrow x \in B$" zeigen.
  - Die Gleichheit $A = B$ von Mengen kann man entsprechend zeigen durch Nachweis von „$A \subset B$" und „$B \subset A$".
  - Injektivität einer Funktion f zeigt man etwa durch Nachweis von „$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$".
  - und viele mehr...

Diese grundlegenden Vorgehensweisen sollten zumindest ganz am Anfang explizit genannt werden, an einem Punkt, wo man eine hohe Aufmerksamkeit der Teilnehmer hat.

- Verwandt mit dem vorigen Punkt: Zur Veranschaulichung von Injektivität, Surjektivität, Bijektivität werden oftmals einfache Schaubilder benutzt (siehe Abbildung 4.1). Fürs Konzeptverständnis der Studierenden ist das sicher hilfreich. Die eigentlichen Probleme auf Lernendenseite liegen aber oft nicht so sehr bei der Grundvorstellung des Konzepts an sich, sondern mehr beim konkreten, formalen Nachweisen von Injektivität oder Surjektivität (Bijektivität ist dann weniger das Problem) im Rahmen von Aufgaben. Am Studienbeginn reicht es für viele nicht, nur einmal von dem/der Dozierenden ein Beispiel für einen Nachweis vorgeführt zu bekommen, da man daraus noch selbst das typische Beweisschema herausarbeiten muss. Es sollten also darüber hinaus auch die verschiedenen Nachweismethoden als „Schablonen" explizit genannt werden, etwa von Ihnen im Tutorium: Injektivität kann man z.B. nachweisen, indem man $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ oder die Kontraposition $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ für beliebige x_1, x_2 aus der Definitionsmenge zeigt, usw.

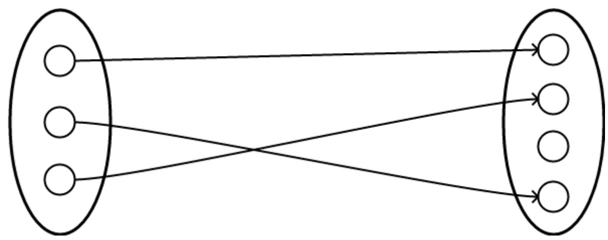

Abbildung 4.1: Ein Beispiel-Schaubild für Injektivität

- Einige Schüler und auch einige Studierende in den ersten Hochschul-Semestern sind sich unter Umständen nicht im Klaren darüber, dass selbst im Fall von Gleichungen mit nur einer Variablen nur ein kleiner Teil aller Gleichungen sich überhaupt mit dem üblichen elementaren „Umformen" lösen lassen. Insbesondere betrifft dies auch Nullstellenbestimmung. Ein recht kurzes Beispiel für eine nicht derart lösbare Gleichung ist $e^2 = xe^x$.

Im Tutorium kann es sich lohnen, diesen Sachverhalt an einer passenden Stelle kurz explizit zu erwähnen.

4.2 Folgen

- Bei Konvergenznachweisen von rekursiven Folgen verschweigen die Musterlösungen oft, wie man auf die einzelnen Ideen kommt, mit denen dann die Lösung so schön aufgeht: Also etwa, wie man sich zwischen steigender und fallender Monotonie entscheidet, und wie man eine passende obere/untere Schranke findet.
  Wenn möglich, sollten Sie also beim Vorrechnen explizit beschreiben, welche Einzelheiten des Folgenterms zu welchen Überlegungen geführt haben. Das fängt z.B. beim konkreten Ausrechnen von ein paar anfänglichen Folgengliedern an, betrifft aber oft dann auch den Aufbau des gegebenen Terms.

- Manchmal kann man Monotonie und Beschränktheit einer rekursiven Folge mit vollständiger Induktion zeigen. Wenn es denn klappt, ist es eine oft einfache Methode. Das ist etwa der Fall, wenn der a_{n+1}-Term selbst offensichtlich monoton in a_n ist; z.B. $a_{n+1} = \sqrt{5 + 4a_n}$.
  Manche rekursiven Folgen kriegt man so aber schwer in den Griff, man löst stattdessen besser die zugehörigen Ungleichungen auf. Ein Beispielterm, wo das nötig ist, ist $b_{n+1} = \dfrac{8b_n}{b_n^2 + 4}$ (wobei man die Monotonie mithilfe der Ungleichung $b_n \leq \dfrac{8b_n}{b_n^2 + 4} = b_{n+1}$ zeigt).
  Für die Studierenden kann es hilfreich und evtl. frustvermeidend sein, darauf hinzuweisen, dass dies zwei typische Ansätze bei Aufgaben zu rekursiven Folgen sind und man bei Nichtfunktionieren des einen den anderen Ansatz ausprobieren kann.

- Man vergisst gerne, an welchen Stellen man überhaupt die Grenzwertsätze anwendet (das gilt auch später bei Funktionsgrenzwerten). Versuchen Sie immer darauf zu achten, und schreiben Sie es möglichst an die Gleichheitszeichen dran (etwa als Kürzel GWS), auch als Hilfe für die Studierenden.

- Ein gelegentlich auftretender Fehler ist es, bei mehrfachen Grenzwertbildungen fälschlicherweise deren Vertauschbarkeit/Kommutativität anzunehmen. Ein Beispiel für die Nicht-Vertauschbarkeit, welches Sie evtl. im Tutorium kurz ansprechen können:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{m}{m+n}\right)=\lim_{m\to\infty}0=0,\quad \text{aber}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+n}\right)=\lim_{m\to\infty}1=1$$

Noch einfacher, allerdings nicht so „schön", da man mit ∞ als Grenzwert hantiert:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}0=0,\quad \text{aber}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{m}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}\infty=\infty$$

- Ist $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Manchmal wird diese schöne Eigenschaft auch fälschlicherweise bei von Null verschiedenen Grenzwerten angenommen. Wenn Sie die obige Aussage zu Nullfolgen bei sich im Tutorium benutzen, empfiehlt es sich deshalb, explizit zu betonen, dass es so wirklich nur für Nullfolgen gilt: Aus der Konvergenz der Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert a folgt im Allgemeinen nicht die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ – es gilt $\lim_{n\to\infty}(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}=1$, aber die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ selber divergiert.

4.3 Reihen

- Aufgaben zur Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen erfordern zur Lösung besonders oft eine anfängliche Probierphase, in der man etwa schaut, ob eher Konvergenz oder Divergenz zu vermuten ist, welches Kriterium angewendet werden könnte, und wie man bei Reihentermen mit variablem x eine sinnvolle x-Fallunterscheidung treffen kann. Bei diesem Thema ist es entsprechend wichtig, beim Entwickeln von Lösungen in der Tutorgruppe nicht nur die saubere finale Lösung an die Tafel zu schreiben, sondern auch solche Überlegungen explizit darzustellen, die man am Anfang in der Probierphase tätigt. Ob dies verbal oder auch schriftlich erfolgt, hängt natürlich vom Einzelfall ab.

- Die Lernenden sollten als Grundlage natürlich die gängigen Konvergenz- bzw. Divergenzkriterien kennen. Zum Vertrautwerden mit den jeweiligen Vorgehen eignet sich eine separate, ggfs. eigenständige „Durchführung“ der Kriterien an einfachen Reihen.

- Vor allem bei komplexeren Reihenterme benötigt man ein Gespür bzw. einen guten Blick dafür, welche Teilterme die ausschlaggebenden im Reihenterm sein können. Dazu gehört die Kenntnis einiger Standardreihen mit Konvergenz bzw. Divergenz, etwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha},\ \alpha > 1 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha},\ 0 < \alpha \leq 1 \quad ;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k,\ |q| < 1 \quad ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k,\ |q| > 1 \quad ;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{\beta k},\ x, \beta \in \mathbb{R} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \quad .$$

- Einige der genannten Reihen können auch beim Finden einer sinnvollen Fallunterscheidung helfen, falls ein variables x im Reihenterm vorkommt.

- Sowohl zum Einschätzen des Terms als auch für Abschätzungsketten ist die Kenntnis gängiger Abschätzungen hilfreich, etwa

$$|a+b| \leq |a| + |b|,\ a, b \in \mathbb{R} \quad ; \quad |\sin(x)| \leq 1\ x \in \mathbb{R} \quad ; \quad |\sin(x)| \leq |x|,\ x \in \mathbb{R}.$$

- Bei den Abschätzungsketten (etwa für das Majoranten- oder Minorantenkriterium) muss man meist von hinten nach vorne denken, u.a. um nicht zu grob abzuschätzen. Auch hierbei hilft die Kenntnis einiger gängiger Abschätzungen, siehe voriger Punkt.

- Man beachte, dass beim Majorantenkriterium $|a_n| \leq b_n$ gefordert ist und *nicht* etwa $a_n \leq b_n$; beim Minorantenkriterium dagegen $a_n \geq b_n$ und *nicht* $|a_n| \geq b_n$. Dies wird gerne von Studierenden vergessen oder verwechselt. Es ist hilfreich, als Tutor/in dafür ein paar Beispielreihen parat zu haben: Beim Majorantenkriterium sind das z.B. die Reihen über $a_k = -k$ und über $b_k = \frac{1}{k}$, beim Minorantenkriterium die Reihen über $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$ und über $b_k = \frac{1}{k}$.

- Man braucht ein Gespür dafür, welches Kriterium bei einer gegebenen Reihe am hilfreichsten sein könnte. Ein Hinweis z.B. für das Quotientenkriterium könnte etwa ein Bruch sein, dem man ansieht, dass sich darin bei Kriterienanwendung viel wegkürzt. Hinweis für das Wurzelkriterium ist etwa ein Exponent k, der dann bei Kriterienanwendung durch die k-te Wurzel verschwindet. Eine erfolgreiche Anwendung des Majoranten- bzw. Minorantenkriteriums lässt sich etwa vermuten bei näherungsweisem Erkennen von passenden Standardreihen (siehe oben) im Reihenterm.

- Beim Umgang mit Produkten von Reihen stößt man auf das Cauchy-Produkt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

(hier zunächst rein formal angegeben, unabhängig von Konvergenz/Divergenz). Dabei werden oft die Bedingungen bzgl. Konvergenz vergessen: Sind beide Reihen absolut konvergent, so ist auch die Produktreihe absolut konvergent. Wenn eine der beiden Reihen über a_n oder b_n absolut konvergiert und die entsprechend andere bedingt konvergiert, kann man im Allgemeinen nur die bedingte Konvergenz der Produktreihe folgern (Konvergenzsatz von Mertens). In beiden vorigen Fällen gilt die obige Gleichung. Sind allerdings beide Reihen nur bedingt konvergent, kann man nicht einmal die (bedingte) Konvergenz der Produktreihe folgern.
Ein Beispiel für diesen letzteren Fall: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ mit sich selbst divergiert jedoch. Es ist

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}}.$$

Mit etwas weiterer Rechnung kann daraus gefolgert werden, dass $\lim_{n\to\infty} |c_n| = 2$ ist und damit das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergiert. Ein ausführlicher Beweis kann unter `http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1etecphys2010w/`

media/material-ueb-08.pdf abgerufen werden.

4.4 Potenzreihen

- Bei Aufgabenstellungen zu Potenzreihen ist zu beachten: Soll man nur den Konvergenzradius bestimmen, ist man meist schnell fertig. Soll man jedoch allgemein die Konvergenz der Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $x \in \mathbb{C}$ untersuchen, hat man mehr Arbeit; für x innerhalb bzw. außerhalb des Konvergenzradius geht das natürlich genauso schnell, aber man muss hier auch noch die x genau „auf“ dem Konvergenzradius untersuchen. Bei reellen Potenzreihen sind das „nur“ zwei x-Stellen, im Komplexen schon unendlich viele. Je nach gegebenen Term kann dies recht aufwendig werden.

4.5 Stetigkeit

- Die Veranschaulichung des Stetigkeitskonzepts mittels ε- und δ-Schlauch – welche typischerweise schon in der Vorlesung gezeigt wird, siehe auch Abbildung 4.2 – ist als Grundvorstellung sicherlich hilfreich. Zumindest, wenn mehrere Teilnehmer diese noch nicht gesehen haben oder noch nicht ausreichend durchdenken konnten, lohnt es sich, die Visualisierung im Tutorium zu wiederholen.

- Andererseits liegen Verständnisprobleme oft weniger bei der „Schlauchvorstellung“ als vielmehr bei dem zielgerichteten Durchführen des (ε, δ)-Abschätzverfahrens. Dies sollte man durchaus explizit skizzieren: Man versucht, aus dem Term $|f(x) - f(x_0)|$ den Faktor $|x - x_0|$ ggfs. mit Potenz herauszuziehen und den Restfaktor so nach oben abzuschätzen, dass er am Ende nur noch höchstens von x_0 abhängt. An dem Punkt kann man dann $< \varepsilon$ fordern. Insgesamt hat dies die grobe Form

$$|f(x) - f(x_0)| = \ldots \underset{|x-x_0|<d}{\leq} \ldots \leq |x - x_0|^r \cdot C(x_0) \overset{!}{<} \varepsilon,$$

wobei $r > 0$ sein muss. Äquivalentes Umformen der letzten Ungleichung nach $|x - x_0|$ liefert einem dann, wie man δ wählen kann, damit die $< \varepsilon$-Bedingung

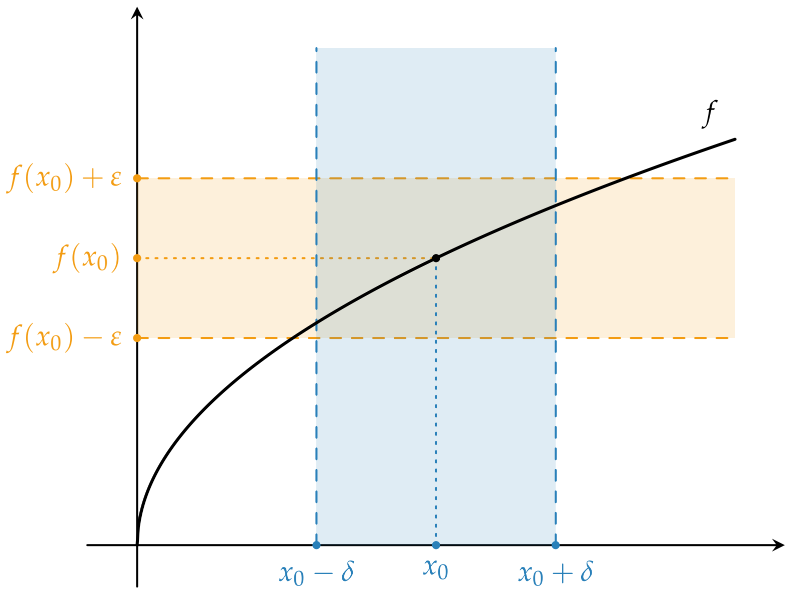

Abbildung 4.2: Illustration zur ε-δ-Stetigkeitsdefinition

erfüllt ist:

$$\ldots \Leftrightarrow |x-x_0| < \left(\frac{\varepsilon}{C(x_0)}\right)^{1/r}$$

und man wählt

$$\delta := \min\left(d, \left(\frac{\varepsilon}{C(x_0)}\right)^{1/r}\right).$$

Ist x_0 ein fester Wert, wird diese „Schablone“ einfacher, da dann C ebenfalls fest ist.

- Es ist hilfreich, sich schon im Vorhinein Beispiele zu überlegen für Funktionen, die einseitig stetig aber nicht stetig sind (Gaußklammer), stetig aber nicht gleichmäßig stetig (x^2), gleichmäßig stetig aber nicht lipschitzstetig ($\sqrt{x}$) etc.

- Möglichst sollte man sich schon vorher visuelle Charakterisierungen für Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit überlegen. Insbesondere der Unterschied zwischen Lipschitz- und gleichmäßiger Stetigkeit ist anschaulich ziemlich verzwickt.

- Eine verbreitete Veranschaulichung für „normale“ Stetigkeit ist der obengenannte „Schlauch“.
- Eine Möglichkeit, gleichmäßige Stetigkeit zu charakterisieren, benutzt ein nur von ε, nicht jedoch von x_0 abhängiges Rechteck mit Höhe 2ε und Breite 2δ; verschiebt man dieses Rechteck am Funktionsgraphen entlang, dürfen die Funktionswerte nicht nach oben oder unten „ausbrechen“ (vgl. die Wikipedia-Seite [1]).
  Eine noch kürzere Charakterisierung gleichmäßig stetiger Funktionen ist, dass diese nur in der infinitesimalen Umgebung einer stetigen oder stetig ergänzbaren Stelle beliebig steil werden dürfen (so wie etwa die Funktion $\sqrt{x}$ in der Umgebung von 0). Werden sie jedoch in der Umgebung einer echten Unstetigkeitsstelle (Polstelle etc., z.B. die Funktion $\frac{1}{x}$ in der Umgebung von 0) oder für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ beliebig steil (etwa die Funktion x^2), dann sind sie (dort) nicht gleichmäßig stetig.
- Lipschitz-stetige Funktionen kann man z.B. dadurch charakterisieren, dass ihre Steilheit beschränkt ist. Anschaulich lässt sich das durch einen horizontalen beidseitigen „Kegel“ illustrieren, der am Funktionsgraphen entlang verschoben werden kann und wobei der Graph immer innerhalb dieses Kegels liegt (vgl. den Wikipedia-Artikel [2], siehe Abbildung 4.3).

• Außerdem kann es für einige Studierende verwirrend sein, dass bei einem fertigen (ε, δ)-Stetigkeitsbeweis das δ für den Stellenabstand gewissermaßen zuerst vorgegeben wird, und sich danach ein Werteabstand kleiner als ε ergibt. Das ist nämlich genau anders herum als das Vorgehen, wenn man selbst die Stetigkeit zeigt: Erst gibt man sich ε vor und findet dann dazu ein passendes δ, sodass alle Bedingungen für die (ε, δ)-Stetigkeit erfüllt sind.

• Beispiel für eine kurze Verständnis-Frage an die Studierenden:
  - Warum weiß man bei einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dass es ein globales Minimum und Maximum geben muss?

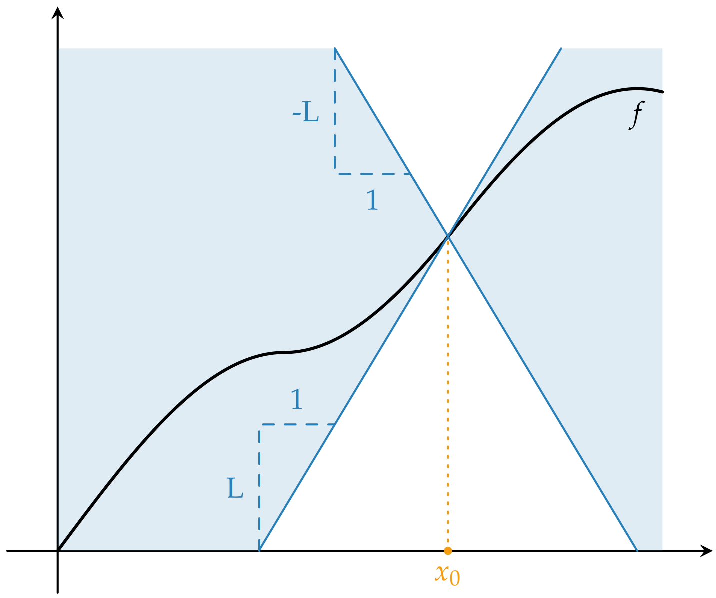

Abbildung 4.3: Illustrationsmöglichkeit für Lipschitz-Stetigkeit

4.6 Differenzierbarkeit, Differentialrechnung, Kurvendiskussion

- Ein durchaus verbreiteter Fehler ist es, bei Differenzierbarkeitsuntersuchungen den Differenzenquotienten in Betragsstriche zu setzen (warum ist das meistens nicht korrekt?). Dabei liegt vermutlich eine falsche Assoziation mit dem $|f(x) - f(x_0)|$-Ausdruck von Stetigkeitsuntersuchungen vor.

- Ähnlich wie bei den verschiedenen Arten von Stetigkeit ist es hier hilfreich, sich schon im Vorhinein Beispiele zu überlegen für Funktionen, die stetig aber nicht differenzierbar sind (Betragsfunktion), differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar ($x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$) etc.

- Öfters wird fälschlicherweise das Bilden/Angeben der Ableitung als Beweis der Differenzierbarkeit verstanden. Als Tutor/in können Sie explizit darauf aufmerksam machen, dass damit nichts gezeigt ist; stattdessen muss man mit der Existenz des Grenzwerts des Differentialquotienten oder über die Zusammensetzung aus bekanntermaßen differenzierbaren Funktionen argumentieren.

- Ein Fehler, den Studierende gelegentlich beim Satz von L'Hospital machen: Die Anwendbarkeit des Satzes auf Grenzwertausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\infty}$ (oder auch mit ein wenig Umformen auf die Formen $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ u.a.) wird übergeneralisiert auf Fälle wie $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$ oder $0 \cdot 0$. Das ist aber sowohl falsch als auch unhilfreich, da diese Fälle sehr einfach ganz ohne L'Hospital lösbar sind.

- Woran erkennt man Ungleichungen, die mithilfe des Mittelwertsatzes bewiesen werden können? Typisch ist vor allem der lineare x-Faktor, durch den man zur Anwendung des MWS die jeweilige Ungleichung äquivalent dividieren muss: z.B. $\frac{1}{4}x \leq \tanh(x) \leq x$ für $x \in [0,1]$ mit Linearfaktor $(x-0)$ oder $e^x \geq x+1$ für $x \in \mathbb{R}$ mit Linearfaktor $(x-(-1))$. Für Ungleichungen mit zwei Variablen braucht man eine entsprechende Differenz als „Linearfaktor": z.B. $b^3 - a^3 \leq 3(b-a)b^2$ für $0 < a < b$ mit Faktor $(b-a)$.

- Horizontale Verschiebungen des Funktionsgraphen – z.B. bei $f(x-1)$ statt $f(x)$ mit um 1 nach rechts verschobenem Graphen – kann man solchen Studierenden, die damit noch nicht gut vertraut sind, recht anschaulich erklären, indem man das Funktionsargument als Zeitpunkt interpretiert. Wenn man etwa wie oben 1 vom Argument subtrahiert, so erreicht man mit $f(x-1)$ jeden Wert erst um 1 „später" als $f(x)$, also um 1 weiter rechts.
  Ähnlich kann man bei einem Vorfaktor am Argument erklären: Bei $f(2x)$ statt $f(x)$ „läuft die Zeit doppelt so schnell", man erreicht beim Fortschreiten nach rechts alle Funktionswerte jeweils schon „nach der Hälfte der Zeit"; der Graph wird also mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ horizontal gestaucht.

4.7 Integralrechnung

- Bei einigen Studierenden dürfte sich das Verständnis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (also dass das flächenbezogene Integrieren die Ableitungsoperation umkehrt) auf formal-axiomatisches Nachvollziehen beschränken. Eine Illustration wie in Abbildung 4.4 kann aber zu einem anschaulich-geometrischen Verständnis helfen: Die Approximation des roten

Flächeninhalts $A(x+h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$ ist äquivalent zur Approximation $\frac{A(x+h)-A(x)}{(x+h)-x} \approx f(x)$, und durch den Grenzübergang $h \to 0$ bekommt man die Aussage des Hauptsatzes.

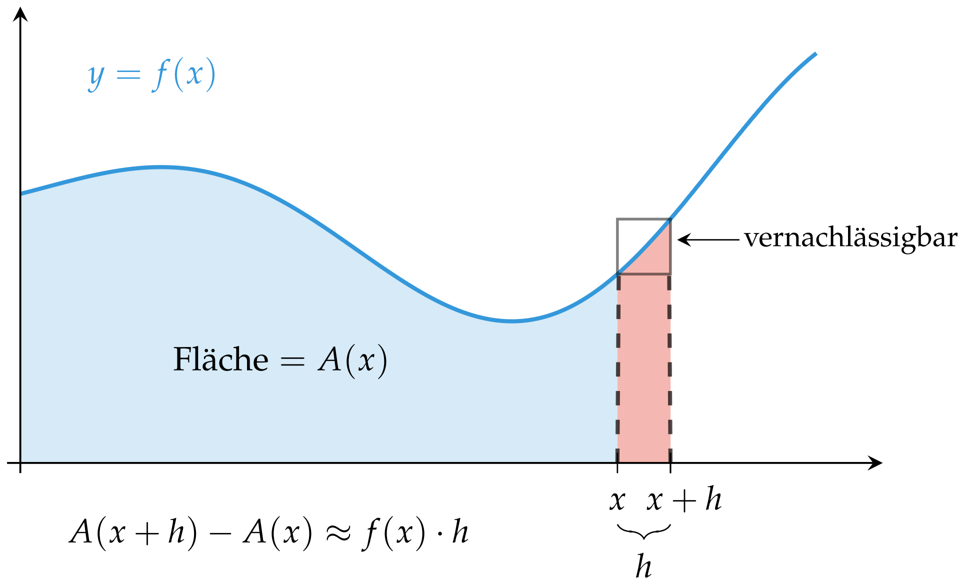

Abbildung 4.4: Illustration zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

- Die Terme von zu integrierenden Funktionen müssen recht speziell gewählt sein, damit es überhaupt eine geschlossen darstellbare Stammfunktion gibt. Das kann man den Studierenden ruhig explizit mitteilen. Schon einige sehr einfache Funktionen sind nicht geschlossen integrierbar, etwa $\frac{1}{\sqrt{x^3-\cos(x)}}$, $\frac{\sin(x)}{x}$ (siehe Integralsinus), oder e^{-x^2} (siehe Fehlerfunktion). Man kann sogar sagen: Bastelt man sich eine Funktion „wild verschachtelt" zusammen, etwa $\frac{\sin\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)}{\sqrt{x^3+2-e^{\cos(5x)}}}$, dann ist diese Funktion höchstwahrscheinlich *nicht* geschlossen integrierbar.
  Eine mögliche Erkenntnis für die Studierenden ist hier, dass es zur „Beherrschung" von Integrationsaufgaben nicht zielführend ist, beliebig komplizierte Terme zu integrieren zu versuchen – stattdessen sollte man sich das Wissen darüber aneignen, welche Funktionstypen mit welchen Ansätzen integriert werden können, und diese jeweils an Beispielen üben (viele Ansätze findet

man z.B. in gängigen Formelsammlungen). Das ist anders als das Bestimmen von Ableitungen, bei welchem wenige Regeln ausreichen, um praktisch alle aus elementaren Funktionen zusammengesetzten (differenzierbaren und nicht stückweise definierten) Funktionen abzuleiten.

- Die Formel für die partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)] - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

ist gar nicht so leicht zu merken – wo wird der eine Faktor integriert, wo wird der andere abgeleitet? Zwar kann man sich die gesamte Formel recht einfach mit der Produktregel für Ableitungen herleiten, allerdings kann in bestimmten Situationen (Prüfungen etc.) die Zeit dafür fehlen. Dafür ist es hilfreich, auch mal eine Art Merksatz zu formulieren, z.B. „In beiden Summanden wird integriert, aber nur am Ende wird abgeleitet".

- Es ist auch eine Erklärung wert, wie man sich bei der Anwendung partieller Integration dafür entscheidet, welcher Faktor integriert und welcher abgeleitet wird. Meistens möchte man, dass der abzuleitende Faktor nach einem oder mehreren Schritten wegfällt: Beispiele dafür sind x bzw. x^3 bei $\int xe^x dx$ bzw. $\int x^3 e^x dx$. Und der zu integrierende Faktor sollte selbst möglichst leicht integrierbar sein; bei den vorigen Beispielen ist das für e^x natürlich zutreffend.

- Die Formel $\int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t$ für die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ wird oft einfach als solche gelernt. Man kann sie aber auch anschaulich nachvollziehen: Ähnlich wie man beim Riemann-Integral die Fläche unter einem Funktionsgraphen mit einer Summe einzelner Balkenflächen approximieren kann, lässt sich die Länge einer Kurve mit einer Summe einzelner Streckenlängen approximieren. Man erhält einen Polygonzug. Lässt man dabei die Unterteilung wie in Abbildung 4.5 immer feiner werden, erhält man mit Grenzwertbildung die Kurvenlänge.
  Rechnerisch sieht das folgendermaßen aus: Für eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \gamma(t)$, Unterteilungsabstand $\Delta t = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ sowie die Unterteilungsstellen

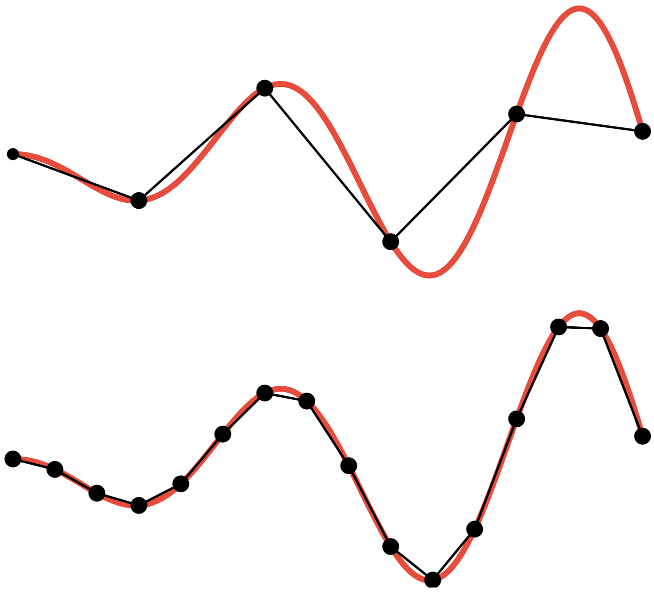

Abbildung 4.5: Verfeinern eines Polygonzugs an einer Kurve

$t_i = a + i\Delta$, $i = 0, 1, \ldots, N$ hat man für die Kurvenlänge

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{\Delta t} \right| \cdot \Delta t = \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Die Gleichheit rechts muss man zwar noch etwas genauer begründen, aber diese Rechnung zeigt bereits die Idee dahinter.

4.8 Partialbruchzerlegung

- Das System hinter dem Aufstellen der Partialbrüche $\frac{a_k}{(x-u)^k}$ und $\frac{b_l x + c_l}{(x^2+vx+w)^l}$ kann für die Studierenden undurchschaubar sein – vor allem wenn man unklare/inkorrekte Regeln wie „bei quadratischem Nenner steht im Zähler ein linearer Term $bx + c$“ benutzt. Die Formel

$$R(x) = P(X) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{ik}}{(x-u_i)^k} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{m_i} \frac{b_{jl}x + c_{jl}}{(x^2+v_jx+w_j)^l}$$

hilft mit ihrer Unanschaulichkeit wenig dabei, die Regeln fürs Vorgehen zu erfassen.
Stattdessen kann man ruhig einmal sinngemäß folgendes Schema anschreiben, wobei als Voraussetzung natürlich der Nenner vollständig faktorisiert und der Zählergrad kleiner als der Nennergrad sein muss. Der Grad der Formalität ist dabei variabel, etwa bzgl. der Anzahl benutzter Indizes.
$\frac{\ldots}{\ldots(x-u_i)^{n_i}\ldots}$ bekommt die Summanden

$$\frac{a_{i1}}{(x-u_i)^1}+\frac{a_{i2}}{(x-u_i)^2}+\ldots+\frac{a_{in_i}}{(x-u_i)^{n_i}}.$$

$\frac{\ldots}{\ldots\left(x^2+v_jx+w_j\right)^{m_j}\ldots}$ bekommt die Summanden

$$\frac{b_{j1}x+c_{j1}}{\left(x^2+v_jx+w_j\right)^1}+\frac{b_{j2}x+c_{j2}}{\left(x^2+v_jx+w_j\right)^2}+\ldots+\frac{b_{jm_j}x+c_{jm_j}}{\left(x^2+v_jx+w_j\right)^{m_j}}.$$

4.9 Topologie

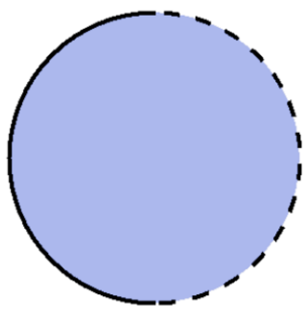

Abbildung 4.6: Weder offene noch abgeschlossene Menge

- Ist eine Menge nicht offen, folgt daraus nicht, dass diese abgeschlossen ist. Das ist nicht immer allen Studierenden bewusst, sodass schonmal die Abgeschlossenheit einer Menge aus ihrer Nichtoffenheit gefolgert wird oder umgekehrt. Daher kann man im Tutorium alle Möglichkeiten einmal durchgehen: Eine Menge kann offen (z.B. Kreismenge ohne Rand), abgeschlossen (z.B. Kreismenge inklusive Rand), offen und abgeschlossen (z.B. $\mathbb{R}$) und weder offen noch abgeschlossen (z.B. halboffenes Intervall $[a, b)$) sein – siehe als weiteres Beispiel zu letzterem auch Abbildung 4.6, wobei die durchgezogene Linie für die Zugehörigkeit des Rands zur Menge steht, die gestrichelte Linie für die Nichtzugehörigkeit des Rands zur Menge.

4.10 Differentialgleichungen

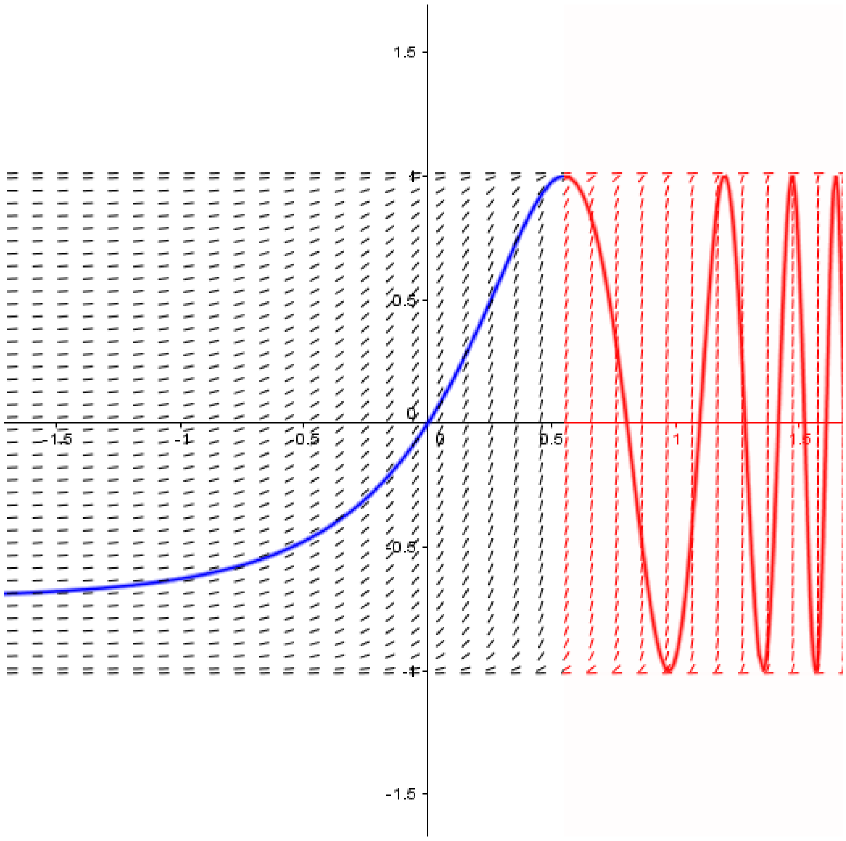

Abbildung 4.7: Beispiel eines Richtungsfeldes, hier beschränkt durch $-1 \leq y \leq 1$, mit eingezeichneter Funktion, die im rotgefärbten Bereich die Richtungen verletzt und dort entsprechend die zugrundeliegende DGL nicht erfüllt

- Das Zeigen von Richtungsfeldern (siehe z.B. Abbildung 4.7) kann bei der Verdeutlichung einiger grundlegender Konzepte von Differentialgleichungen helfen. Dazu gehört etwa:

- Eindeutigkeit von Lösungen – insbesondere auch bestimmte Stellen, an denen Eindeutigkeit verlorengeht
- Möglichkeiten für stationäre Lösungen bei separablen Differentialgleichungen, und an welchen Stellen eine nicht-stationäre mit einer stationären Lösung „weitergeführt“ werden kann.
- Auswirkung des Anfangswerts auf die Lösungsfunktion

Sehr anschaulich und dazu noch dynamisch veränderbar sind passende GeoGebra-Applets (https://www.geogebra.org/materials/), in denen man den Term der DGL eingeben kann und sofort das zugehörige Vektorfeld mit verschiebbarem Anfangswert und Lösungsfunktion erhält. Natürlich ist dies im konkreten Tutorium nur dann machbar, wenn dafür sowohl die Beamer-Ausstattung als auch die zusätzliche Zeit verfügbar sind.
Ist dies nicht möglich, sind auch grobe Richtungsfelder, angezeichnet an der Tafel, bereits als Anschauung wertvoll.

4.11 Lineare Gleichungssysteme

- Die Elementarumformung, ein Vielfaches einer Zeile auf eine andere zu addieren, birgt eine Fehlerquelle: Es kann passieren, dass Studierende danach die falsche Zeile stehen lassen, aufgeschrieben als

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{II+(-1)\cdot I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

oder

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{II+(-1)\cdot I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right).$$

Richtig wäre stattdessen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{II+(-1)\cdot I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right).$$

Zwar macht es hier zufälligerweise keinen Unterschied bei der Lösungsmenge, und man kommt damit immer noch auf das korrekte Ergebnis. Spätestens wenn Parameter in den Zeilen vorkommen, kann es bei der Lösungsmenge aber einen echten Unterschied machen, z.B. bei der falschen Rechnung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha+6 & 3 \\ \alpha & 7 & \gamma \end{array}\right) \overset{II+(-1)\cdot I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 7 & \gamma \\ 0 & -\alpha^2-6\alpha+7 & \gamma-3\alpha \end{array}\right).$$

- Machen Sie sich und ggfs. den Lernenden kurz klar, warum man überhaupt die Matrix-Kurzschreibweise mit per Strich getrenntem Lösungsvektor zum Lösen von LGS nutzen kann. Man sieht es sehr schnell, wenn man einfach die elementaren Zeilenumformungen bei komplett ausgeschriebenen Gleichungen der Form $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ ausführt.

- Auch kann man gegebenenfalls erklären, wieso das Invertieren einer Matrix A mit dem bekannten Verfahren $(A|I_n) \underset{\text{Gauß-Algorithmus}}{\rightsquigarrow} \left(I_n|A^{-1}\right)$ funktioniert.
  Dazu mache man sich klar, dass bei einer Matrixmultiplikation $A \cdot X$ eigentlich nichts anderes gemacht wird als A mit den Spaltenvektoren x_i von X zu multiplizieren und die Ergebnisvektoren wieder nebeneinander zu schreiben:

$$A \cdot X = A \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \ldots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ A \cdot x_1 & \ldots & A \cdot x_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

  Wenn man nun das Verfahren $(A|I_n) \underset{\text{Gauß-Algorithmus}}{\rightsquigarrow} \left(I_n|A^{-1}\right)$ durchführt, macht man nichts anderes, als simultan die Gleichungen $A \cdot x_i = e_i$ für alle Einheitsvektoren e_i zu lösen. Die Lösungen x_i bilden dann die Spalten der inversen Matrix A^{-1}.

- Für Schüler/Studienanfänger mag es manchmal schwer vorstellbar sein, dass es beim Gauß-Algorithmus prinzipiell egal ist, welche Zeilen man als Stufenzeilen (das entsprechende Pivot-Element muss natürlich ungleich Null sein) stehen läßt und bei welchen man stattdessen die anfänglichen Koeffizienten eliminiert. Darauf kann man als Tutor/in hinweisen.
  Allgemeiner kann man auch darauf hinweisen, dass man, solange man sich an die erlaubten Umformungen hält, keine „Fehler“ machen und auch nie in

eine „Sackgasse“ geraten kann. Man wird dadurch nie ein lösbares LGS in ein unlösbares LGS überführen können o.ä.

4.12 Skalarprodukte, Orthogonalisierung

- Die genaue Formel des Gram-Schmidt-Verfahrens

$$v_1 := w_1, \; v_n := w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle w_n, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$$

ist wegen der vielen Indizes nicht für jeden einfach zu merken. Es fällt jedenfalls deutlich leichter, wenn man sich die Idee dahinter klarmacht:
Der Term $\frac{\langle w_n, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$ ist die orthogonale Projektion von w_n auf v_i, was man sich mit der geometrischen Interpretation des Skalarprodukts klarmachen kann. Den Nenner braucht man, da der Vektor v_i nicht auf Länge 1 normiert ist. Indem man nun all diese orthogonalen Projektionen von w_n *abzieht*, schert man diesen Vektor so in Richtung aller vorigen v_i, dass v_n bei orthogonaler Projektion auf diese verschwindet und somit senkrecht auf diesen steht (siehe Abbildung 4.8).

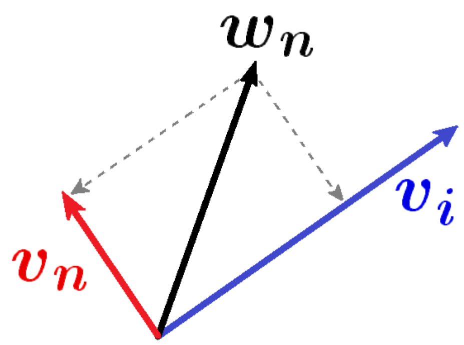

Abbildung 4.8: Illustration des orthogonalen Projizierens beim Gram-Schmidt-Verfahren

4.13 Matrizen, Diagonalisierung, Jordan-Normalform

- Auch wenn es bereits im Schulunterricht erläutert worden ist, wird immer wieder vergessen, dass im Gegensatz zur allgegenwärtigen Multiplikation über den bekannten Zahlenbereichen die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist. Im Tutorium kann die Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation kurz anhand eines einfachen Beispiels gezeigt werden. Eine beispielhafte Konstellation ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Man kann ruhig zur Illustration der Jordan-Normalform ein paar Beispielmatrizen hinschreiben, die in JNF sind bzw. eben nicht in JNF sind. Ein Beispiel für eine Matrix *nicht* in JNF, die aber so ähnlich aussieht, ist $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- Machen Sie sich (und den Studierenden) klar, dass für die Jordan-Basistransformation die Reihenfolge der Basisvektoren wichtig ist, um wirklich damit die JNF zu erhalten.

4.14 Stochastik

- Man kann durchaus einmal darauf hinweisen, dass die Darstellung von Wahrscheinlichkeiten als Zahlen aus $[0,1]$ zunächst eine Konvention ist, für die aber sehr viele Vorteile sprechen: Laplace-Wahrscheinlichkeiten $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ („Anzahl günstiger Ergebnisse durch Anzahl aller möglichen Ergebnisse") führen als Bruchzahlen zwischen 0 und 1 ganz natürlich zu dieser Modellierung; bei Wahrscheinlichkeits-Baumdiagrammen kann man damit die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfads miteinander multiplizieren und erhält die Wahrscheinlichkeit des Endereignisses; bei stochastisch unabhängigen Ereignissen A, B kann man dann $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ rechnen; und vieles mehr.

- Bei Lösungen an der Tafel sollten Sie möglichst auch explizit stichworthaft dazuschreiben, welche Überlegungen zur Wahl einer bestimmten Modellierung geführt haben (Urnenmodelle etc.). Oft liegt nämlich bei der Wahl eines geeigneten Modells die Hauptschwierigkeit; das Rechnen innerhalb des gewählten Modells ist typischerweise ein geringeres Problem.

- Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass bei wiederholter Ausführung eines immer gleichen Zufallsexperiments der Durchschnittswert der ersten n Ausführungen sich mit wachsendem n immer mehr um den Erwartungswert des Experiments herum „stabilisiert“. Die Wahrscheinlichkeit, dass der beobachtete Durchschnittswert vom Erwartungswert um eine beliebig klein wählbare Konstante abweicht, läuft für wachsendes n gegen 0. (Dies ist anschaulich gesprochen; die Details der verschiedenen stochastischen Konvergenzbegriffe, welche zur schwachen bzw. starken Version des Gesetzes der großen Zahlen führen, sollen hier nicht besprochen werden.)
  Häufig wird das Gesetz fälschlicherweise so verstanden, dass wenn ein Ereignis bislang weniger als erwartet eingetreten ist, dieses dann in Zukunft „als Ausgleich“ häufiger auftreten muss. Obwohl der „relative“ Durchschnittswert sich beim Erwartungswert einpendelt, gilt dies aber gerade nicht für die *absoluten* Auftretenshäufigkeiten – tatsächlich läuft die Wahrscheinlichkeit, dass die absoluten Auftretenshäufigkeiten um eine beliebig groß wählbare Schranke von der zu erwartenden Anzahl abweichen, mit wachsendem n gegen 1.

4.15 Statistik

- Bei der Betrachtung des Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen in einem bivariaten Datensatz passiert es immer mal wieder, dass Schüler bzw. Studierende den (metrischen Pearson-)Korrelationskoeffizienten mit der Steigung der Regressionsgeraden durcheinanderbringen. Der Korrelationskoeffizient ist aber von der Steigung der Regressionsgeraden völlig unabhängig: „Gemessen“ wird mit der Pearson-Korrelation nur, wie nah die Punktwolke des bivariaten Datensatzes an einem perfekt linearen Zusammenhang liegt, (fast) egal wie die Steigung dieser idealen Gerade ausfällt. Die einzige „pathologische“ Ausnahme liegt vor, wenn eins der beiden Merkmale im ganzen Datensatz immer nur

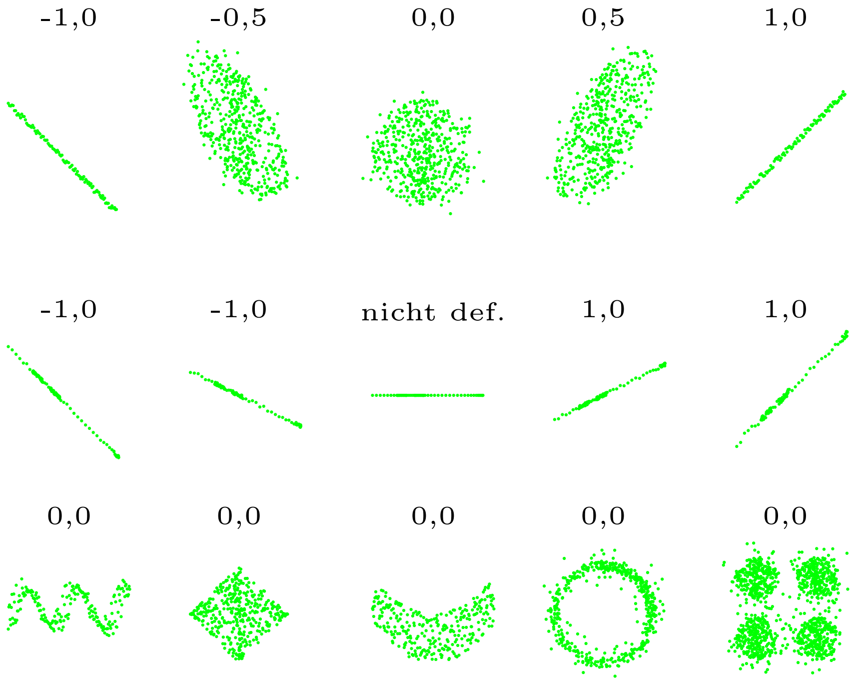

Abbildung 4.9: Bivariate Datensätze mit zugehörigen Pearson-Korrelationskoeffizienten

eine einzige Ausprägung hat, sodass die Merkmalspaare alle auf einer Parallelen zu einer der beiden Achsen liegen; dann ist der Korrelationskoeffizient nicht definiert.
Zur Illustration sind in Abbildung 4.9 exemplarisch einige bivariate Punktwolken mit zugehörigen Pearson-Korrelationskoeffizienten zu sehen (angelehnt an eine der Grafiken im Wikipedia-Artikel [3]).

- Klassisch und durchaus verbreitet ist das Missverständnis, eine Korrelation zwischen zwei Merkmalen würde automatisch auch einen kausalen Zusammenhang zwischen den beiden beweisen. Dies ist natürlich nicht der Fall; ein bekanntes Gegenbeispiel mit der Anzahl von Störchen und von menschlichen Geburten ist in [8] zu finden.
  In einem solchen Fall liegt eine hohe Korrelation zwischen zwei Merkmalen x

und y vor, die aber großteils von einem (oder mehreren) dritten Merkmal(en) herrührt, mit dem (denen) sowohl x als auch y stark korrelieren. Dieses grundsätzliche Problem führt auf den Begriff der *partiellen Korrelation*: Im einfachsten Fall von nur einem einzelnen dritten „Störmerkmal" ist

$$r_{xy.z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{1 - r_{xz}^2}\sqrt{1 - r_{yz}^2}}$$

die partielle Korrelation zwischen x und y bereinigt vom Einfluss von z. Bei mehreren „Störmerkmalen" wird die Berechnung etwas komplizierter. Auf jeden Fall ist es schon im Hinblick auf Allgemeinbildung hilfreich, das Konzept der partiellen Korrelation zu kennen – genau damit werden z.B. in typischen medizinischen Studien Nebeneffekte „herausgerechnet", wie etwa Zigarettenkonsum bei einer Untersuchung zu Auswirkungen von erhöhtem Körpergewicht.

Ein kurzer Hinweis aufs Konzept der partiellen Korrelation kann sich auch deshalb lohnen, da es je nach Hochschule/Dozierenden nicht unbedingt Teil der Grundlagenveranstaltungen zur Statistik/Stochastik ist.

Literatur

[1] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichm%C3%A4%C3%9Fige_Stetigkeit.

[2] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Lipschitz-Stetigkeit.

[3] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Korrelationskoeffizient#/media/File:Correlation_examples.png.

[4] B. Gotzen, J. Heitzer und S. Walcher. *Fachdidaktik Mathematik: Grundlagen. Vorlesungsskript*. RWTH Aachen, 2008.

[5] L. Hefendehl-Hebeker. „Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht.“ In: *Konsequenzen aus PISA - Perspektiven der Fachdidaktiken.* Hrsg. von H. Bayrhuber u. a. Innsbruck: Studienverlag, 2005.

[6] L. Horster. „Unterrichten: 10 gravierende Fehler“. In: *Friedrich Jahresheft 2007: Guter Untericht. Maßstäbe und Merkmale – Wege und Werkzeuge.* (2007). URL: http://www.fachseminar-mathematik.de/schule/Horster_10%20gravierende%20Fehler.pdf.

[7] G. Leuchtenberger und O. Schönberger. *Der "Kanon": Eine historische Handreichung für junge Lehrer*. URL: http://ods3.schule.de/aseminar/stoerungen/histkanon.htm.

[8] Robert Matthews. „Storks Deliver Babies (p=0.008)“. In: *Teaching Statistics* 22.2 (2000), S. 36–38.

[9] H. Meyer. „Zehn Merkmale guten Unterrichts. Empirische Befunde und didaktische Ratschläge.“ In: *Pädagogik* 11 (2003), S. 36–43. URL: http://www.peterkoester.de/download.php?file=7cbed20d2303&req=11&id=139.

[10] A. Rooch, C. Kiss und J. Härterich. „Brauchen Ingenieure Mathematik? – Wie Praxisbezug die Ansichten über das Pflichtfach Mathematik verändert.“ In: *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven.* Hrsg. von I. Bausch u. a. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2014. URL: http://www.ruhr-uni-bochum.de/imperia/md/content/mathematik/lehrstuhlxii/rooch__haerterich__kiss__brauchen_ingenieure_mathematik__preprint.pdf.